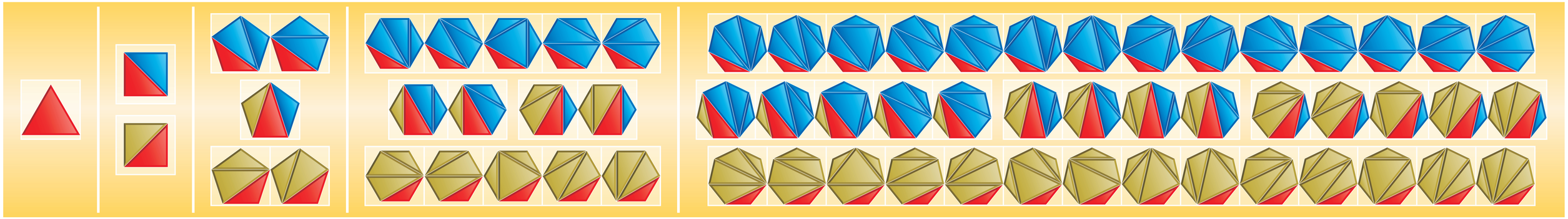
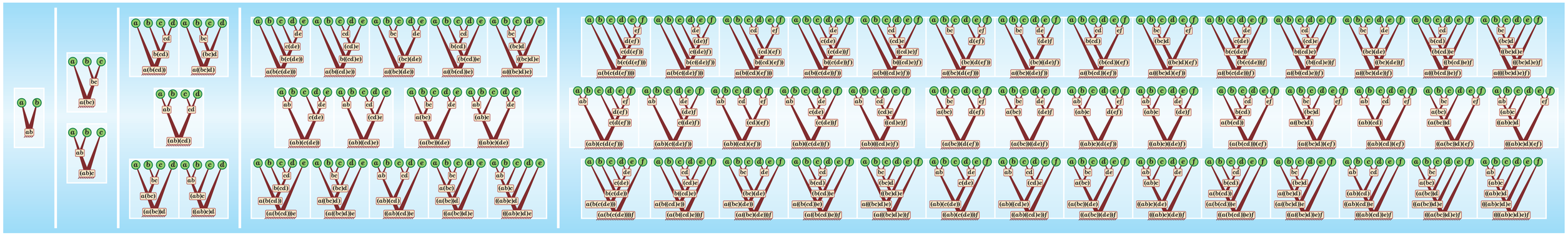




ЧИСЛА КАТАЛАНА

Числа Каталана — последовательность $C_0=C_1=1$, $C_2=2$, $C_3=5$, $C_4=14$, $C_5=42$, . . ., удовлетворяющая рекуррентному соотношению

$$C_{n+1}=C_0C_n+C_1C_{n-1}+\ldots+C_nC_0.$$

Оно сложнее, чем равенство $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$, задающее знаменитую последовательность Фибоначчи $F_1=F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$, $F_7=13$, . . ., но числа Каталана встречаются в комбинаторике не реже, чем числа Фибоначчи.

Числу Каталана C_n равно:

— количество триангуляций (разбиений на треугольники) выпуклого $(n+2)$-угольника;

— количество корневых бинарных деревьев с $n+1$ листьями, а также число способов вычислить произведение $n+1$ множителей;

— количество полимино ширины $n+1$ с «диагональной» осью симметрии, а также число правильных расстановок n пар скобок;

— количество «устойчивых» полениц с n поленьями в основании.

Можно проверить (например, по индукции), что для n-го числа Каталана верна явная формула

$$C_n=\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

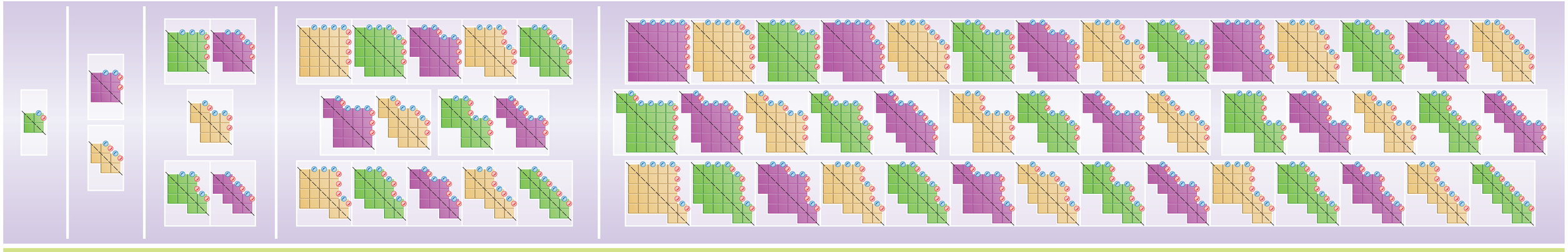
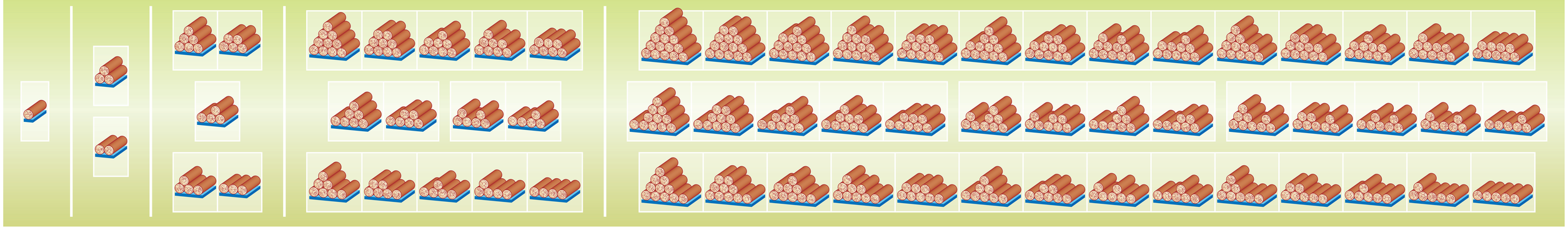
где $\binom{m}{k}=\frac{m!}{k!\,(m-k)!}$ («число сочетаний из m по k») — количество способов выбрать k элементов из данного m-элементного множества.

К числам C_n приводят также задачи о перечислении:

— корневых деревьев с n рёбрами;

— путей ладьи из одного угла доски $(n+1)\times(n+1)$ в противоположный, не поднимающихся выше диагонали;

— способов соединить $2n$ точек окружности n непересекающимися хордами;

— перестановок n чисел, в которых никакие три не идут в порядке убывания;

— перестановок n чисел, поддающихся сортировке при помощи стека.