

Часть 2. Элементы правильных пирамид

2.1. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите:

- а) объём пирамиды;
- б) угол боковой грани с основанием;
- в) расстояние между скрещивающимися рёбрами;
- г) угол между боковыми гранями;
- д) радиус описанного шара;
- е) радиус вписанного шара;
- ж) угол апофемы с соседней боковой гранью.

2.2. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a , боковая грань образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите:

- а) объём пирамиды;
- б) угол бокового ребра с основанием;
- в) расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром;
- г) угол между противоположными боковыми гранями;
- д) угол между соседними боковыми гранями;
- е) радиус вписанного шара;
- ж) радиус описанного шара;
- з) угол апофемы с соседней боковой гранью.

2.3. Сторона основания и высота правильной шестиугольной пирамиды равны a . Найдите:

- а) угол бокового ребра с основанием;
- б) угол боковой грани с основанием;
- в) плоский угол при вершине пирамиды;
- г) угол между соседними боковыми гранями;
- д) радиус вписанного шара;
- е) радиус описанного шара.

2.4. Сторона основания и апофема правильной треугольной пирамиды равны a . Найдите:

- а) радиус описанного шара;
- б) радиус вписанного шара;
- в) угол между боковыми гранями;
- г) угол апофемы с соседней гранью.

2.5. Сторона основания и апофема правильной четырёхугольной пирамиды равны a . Найдите:

- а) радиус описанного шара;
- б) радиус вписанного шара;
- в) угол между соседними боковыми гранями;
- г) угол апофемы с соседней боковой гранью.

2.6. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , а расстояние между скрещивающимися рёбрами равно $\frac{3}{8}a$. Найдите:

- а) угол бокового ребра с плоскостью основания;
- б) угол боковой грани с плоскостью основания;
- в) угол между боковыми гранями;
- г) радиус описанного шара;
- д) радиус вписанного шара;
- е) угол апофемы с соседней боковой гранью.

2.7. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a , а расстояние между диагональю основания и скрещивающимся с ней боковым ребром равно $\frac{a}{4}$. Найдите:

- а) угол бокового ребра с плоскостью основания;
- б) угол боковой грани с плоскостью основания;
- в) угол между соседними боковыми гранями;
- г) радиус описанного шара;
- д) радиус вписанного шара;
- е) угол апофемы с соседней боковой гранью.

2.8. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a ; угол апофемы с соседней боковой гранью равен 45° . Найдите:

- а) угол бокового ребра с основанием;
- б) угол боковой грани с основанием;
- в) угол между боковыми гранями;
- г) радиус описанного шара;
- д) радиус вписанного шара.

- 2.9. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — единичный куб. Найдите объём общей части пирамид $ACB_1 D_1$ и $A_1 C_1 B D$.
- 2.10. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно b , а плоский угол при вершине равен α . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.
- 2.11. Найдите радиус шара, касающегося всех рёбер правильного тетраэдра с ребром, равным a .
- 2.12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S сторона основания равна 2. Через сторону основания BC проведено сечение, которое пересекает ребро SA в точке M . Известно, что $SM:MA=1:3$, а площадь сечения равна 3. Найдите объём пирамиды $SABC$.
- 2.13. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна a , боковые рёбра равны $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на рёбрах AD и SC , параллельные плоскости SAB .
- а) Один из этих отрезков проведён через точку M ребра AD такую, что $AM:AD=3:4$. Найдите его длину.
- б) Найдите наименьшую длину рассматриваемых отрезков.
- 2.14. Угол между соседними боковыми гранями правильной шестиугольной пирамиды равен углу, под которым боковое ребро видно из центра описанной сферы. Найдите этот угол.
- 2.15. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ угол между боковым ребром SA и плоскостью основания $ABCD$ равен углу между ребром SA и плоскостью SBC . Найдите этот угол.
- 2.16. Через боковое ребро SC правильной треугольной пирамиды $SABC$ проведена плоскость, параллельная стороне AB основания. Боковое ребро SA образует с этой плоскостью угол, равный $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.
- 2.17. Все грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом 60° . Найдите объём параллелепипеда.
- 2.18. Рассматривается фигура, полученная в пересечении правильного тетраэдра с его образом при центральной симметрии относительно середины высоты. Найдите объём этой фигуры, если ребро тетраэдра равно a .
- 2.19. Объём правильной четырёхугольной пирамиды равен V , угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 30° . Рассматриваются правильные треугольные призмы, вписанные в пирамиду так, что одно из боковых рёбер лежит на диагонали основания пирамиды, одна из боковых граней параллельна основанию пирамиды, и вершины этой грани лежат на боковых гранях пирамиды. Найдите:
- а) объём той призмы, плоскость боковой грани которой делит высоту пирамиды в отношении $2:3$, считая от вершины;
- б) наибольшее значение объёма рассматриваемых призм.
- 2.20. В правильном тетраэдре точки M и N — середины противоположных рёбер. Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость, параллельную прямой MN , является четырёхугольник площади S , один из углов которого равен 60° . Найдите площадь поверхности тетраэдра.
- 2.21. Найдите угол и расстояние между скрещивающимися медианами двух боковых граней правильного тетраэдра с ребром, равным a .
- 2.22. Сторона основания и высота правильной треугольной пирамиды равны a . Найдите наибольшую площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через апофему пирамиды.
- 2.23. Через середину высоты правильной четырёхугольной пирамиды проведено сечение плоскостью, перпендикулярной боковому ребру. Найдите площадь сечения, если боковое ребро равно b , а угол между противоположными боковыми рёбрами пирамиды равен а) 60° ; б) 120° .
- 2.24. Найдите наибольший возможный угол между плоскостью боковой грани и не принадлежащим ей ребром правильной четырёхугольной пирамиды.