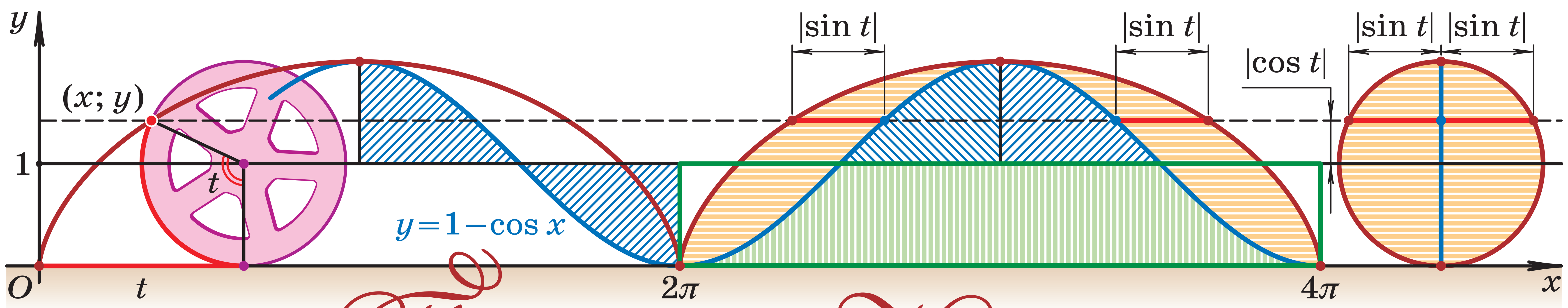
Циклоида — траектория точки на ободе катящегося по прямой колеса. Параметрическое представление: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (радиус колеса считаем единичным). Площадь под графиком $y = 1 - \cos x$ равна 2π (площади прямоугольника $2\pi \times 1$). Площадь «лепестков» равна площади единичного круга, т. е. π. Значит, площадь под «аркой» циклоиды равна 3π.



Принцип Кавальери

1

Если две фигуры можно так расположить на плоскости, что любая прямая, параллельная заданной, пересекает эти две фигуры по равным отрезкам, то площади фигур равны.

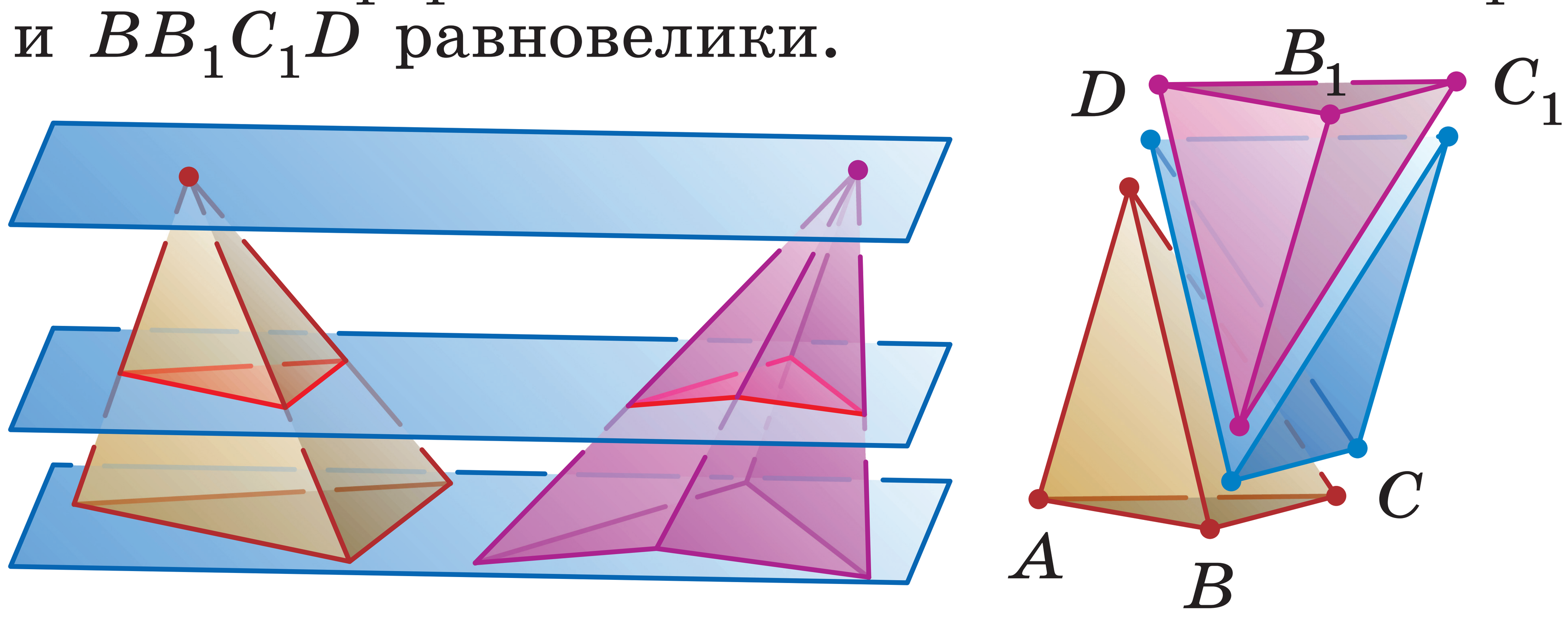
2

Если два тела можно так расположить в пространстве, что любая плоскость, параллельная заданной, пересекает эти два тела по равновеликим фигурам, то объёмы тел равны.

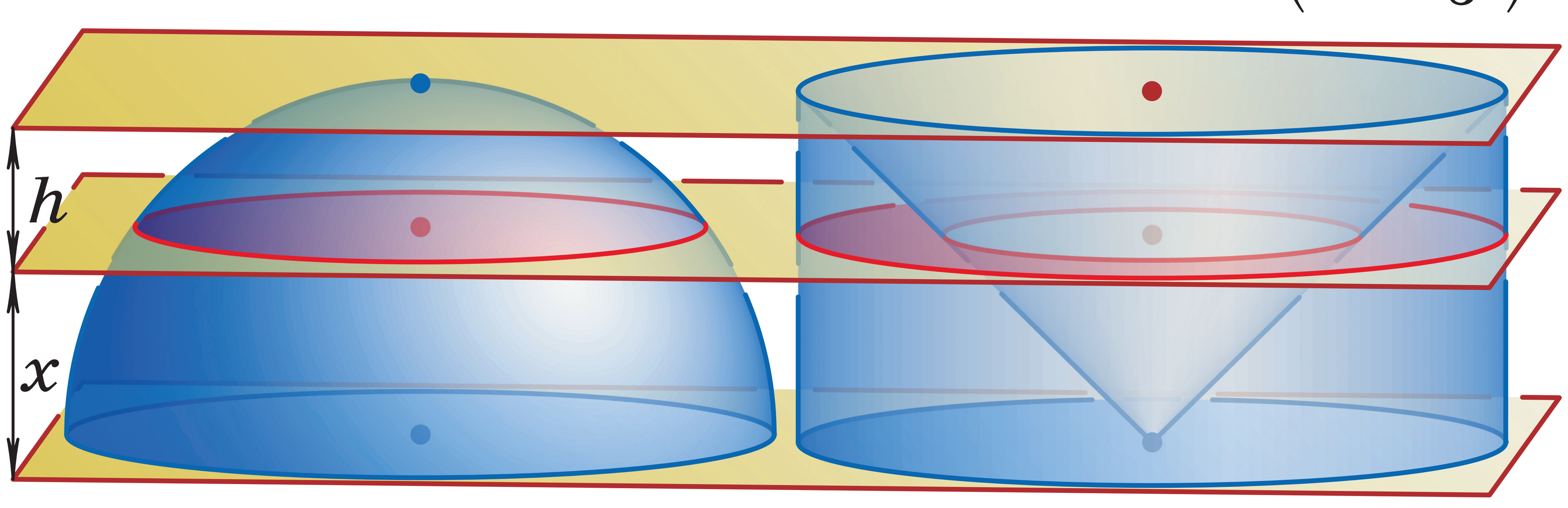
3

Если два тела можно так расположить в пространстве, что любая плоскость, параллельная заданной, пересекает эти тела по фигурам, отношение площадей которых равно k, то отношение объёмов тел также равно k.

Пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики (сечения — подобные основаниям многоугольники). Следствие: объём пирамиды $ABCD$ равен третьей части объёма призмы $ABCDB_1C_1$ с основаниями ABC и DB_1C_1, так как пирамиды $ABCD$, BCC_1D и BB_1C_1D равновелики.

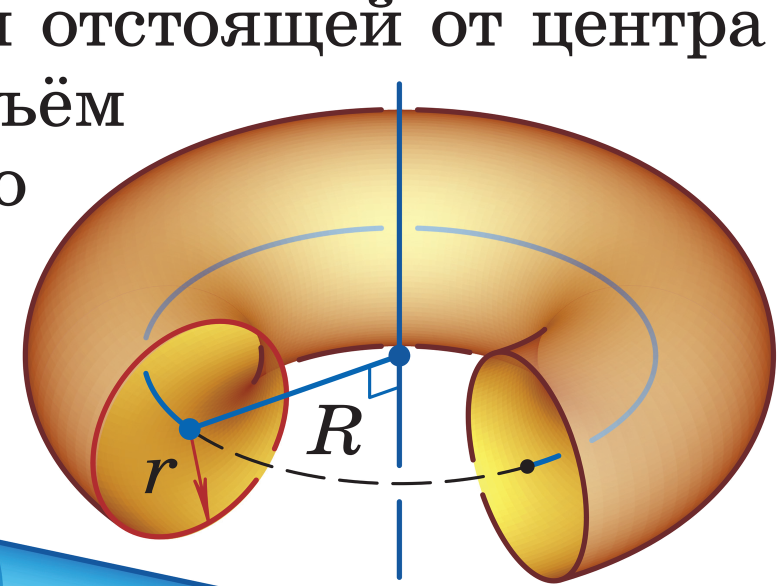


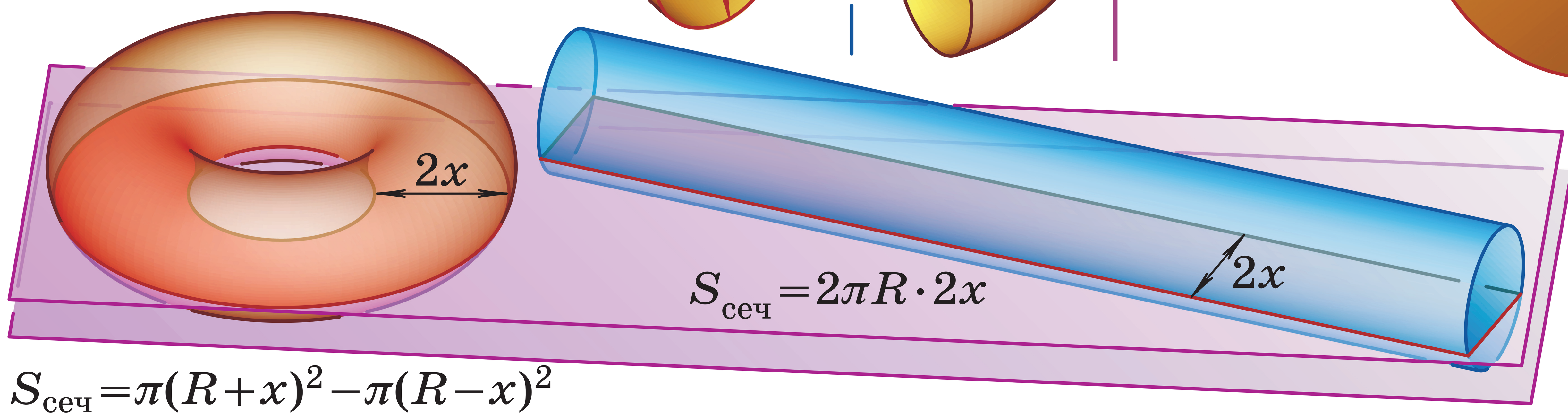
Полушар радиуса R равновелик телу, полученному из цилиндра радиуса R и высотой R удалением конуса с теми же основанием и высотой. Следствия: а) объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$; б) объём шарового сегмента радиуса R и высотой $h<R$ равен $\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$.



$S_{сеч}=\pi(R^2-x^2)$ $S_{сеч}=\pi R^2-\pi x^2$

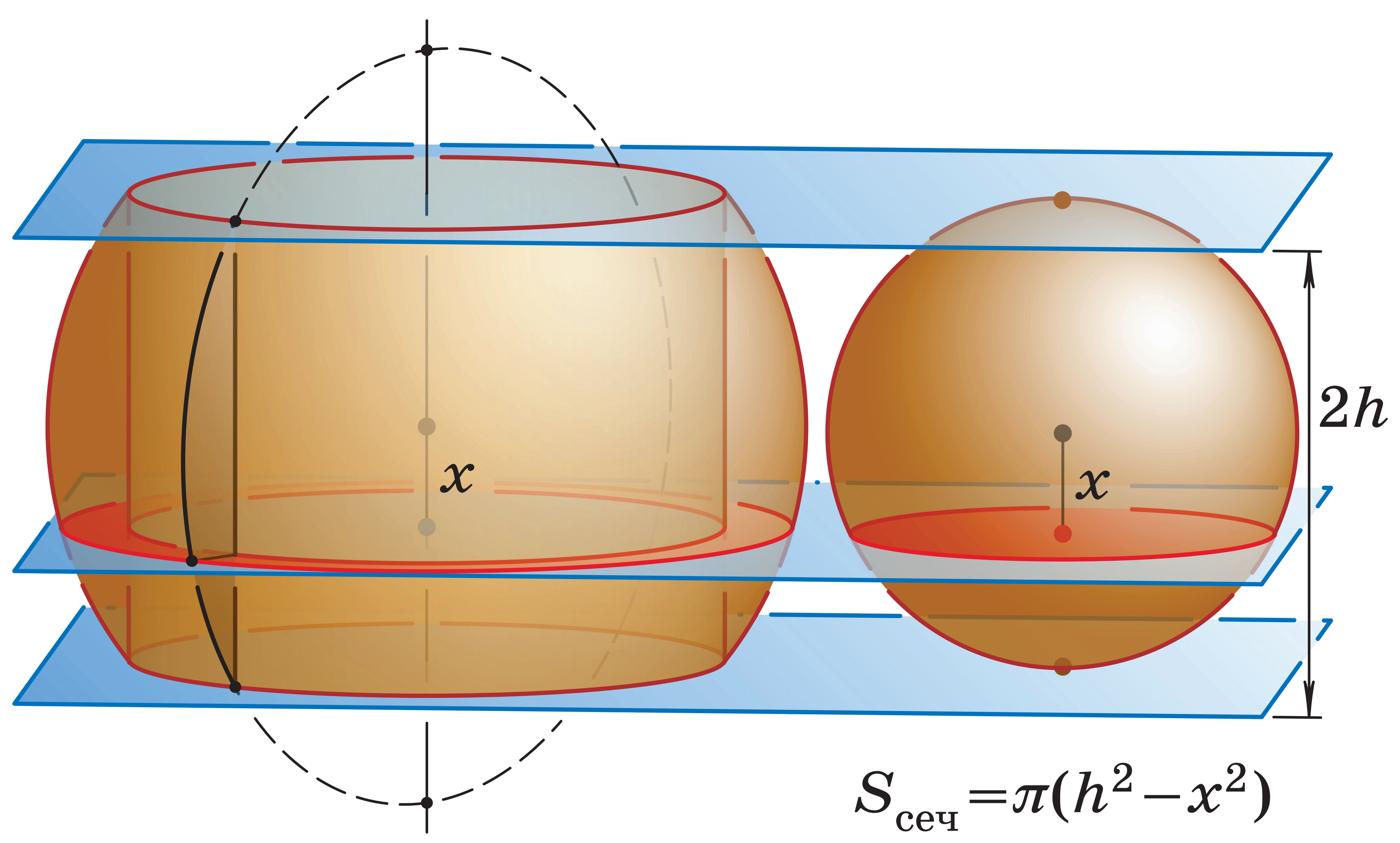
Тор — поверхность, полученная вращением окружности радиуса r вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности и отстоящей от центра на расстояние $R>r$. Объём «бублика», ограниченного тором, равен объёму цилиндра радиуса r и высотой $2\pi R$, т. е. $2\pi^2Rr^2$.





$S_{сеч}=\pi(R+x)^2-\pi(R-x)^2$

Хорда разбивает круг на два сегмента. Тело, полученное вращением меньшего сегмента вокруг диаметра, параллельного этой хорде, называется *шаровым кольцом* (в шаре просверлено отверстие вдоль диаметра). Объём шарового кольца равен объёму шара с радиусом, вдвое меньшим хорды.



$S_{сеч}=\pi(h^2-x^2)$

$S_{сеч}=\pi(R^2-x^2)-\pi(R^2-h^2)$

Объём пересечения P двух бесконечных цилиндров радиуса R, оси которых пересекаются под прямым углом, равен $\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{16}{3}R^3$, так как отношение площадей сечений тела P и вписанного в него шара плоскостью, параллельной осям цилиндров, — квадрата и его вписанного круга — равно $4:\pi$.