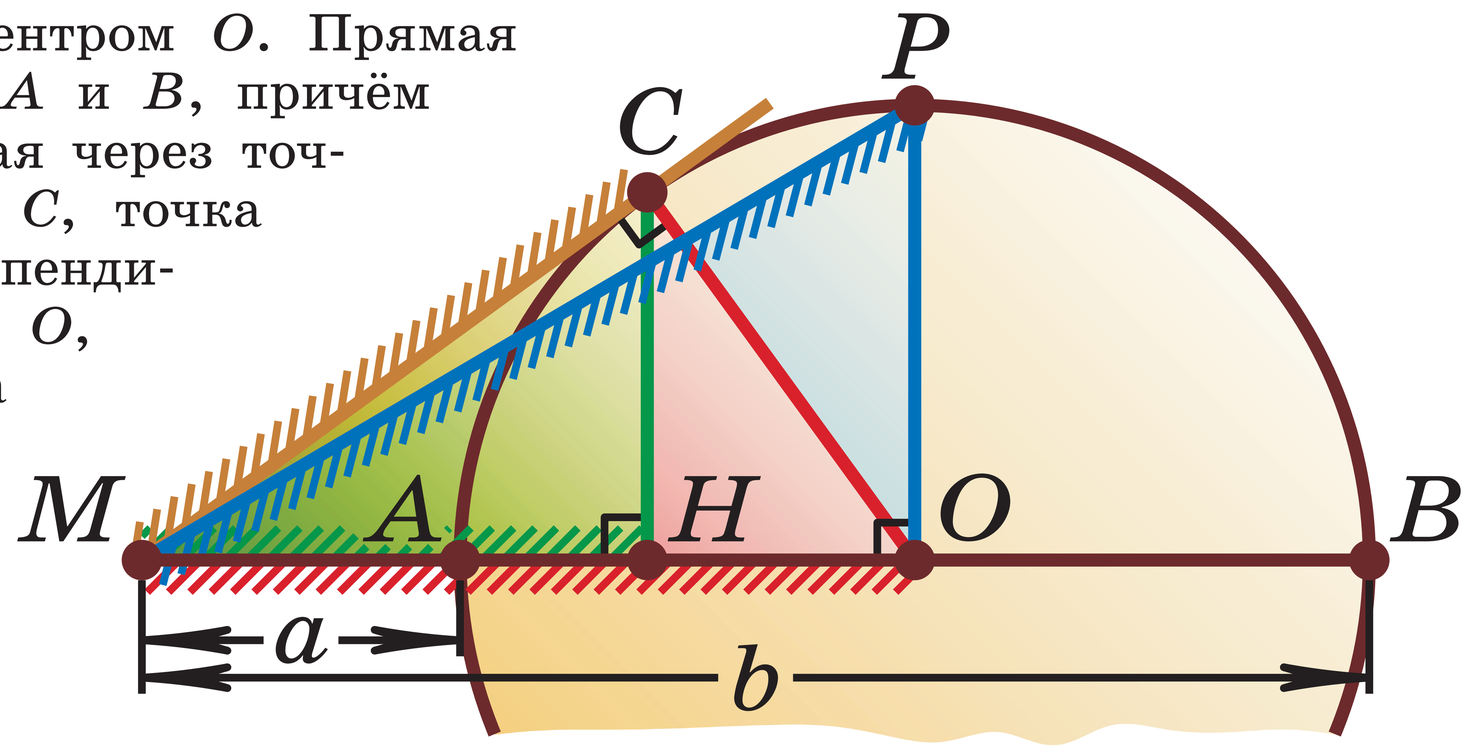
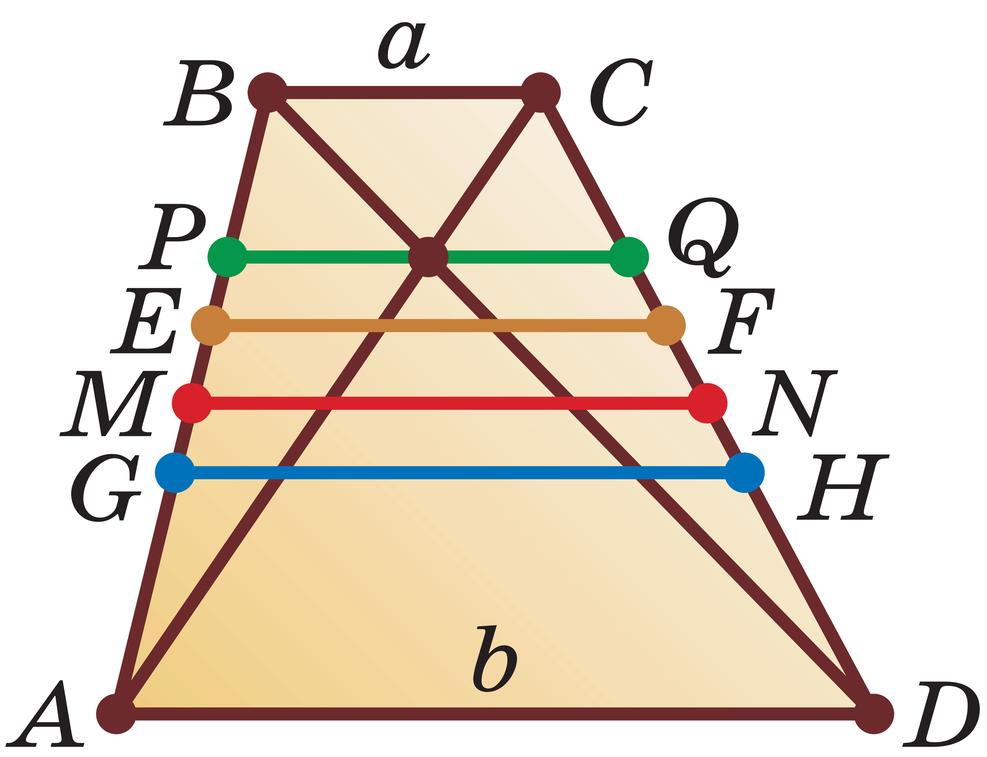
Точка M лежит вне окружности с центром O. Прямая OM пересекает окружность в точках A и B, причём $MA=a$ и $MB=b$. Прямая, проходящая через точку M, касается окружности в точке C, точка H — проекция точки C на AB, а перпендикуляр к AB, восставленный в точке O, пересекает окружность в точке P. Тогда

$$MO=\frac{a+b}{2},\quad MC=\sqrt{ab},$$

$$MH=\frac{2ab}{a+b},\quad MP=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$





В трапеции $ABCD$ проведены четыре отрезка, параллельные основаниям $BC=a$ и $AD=b$:

PQ, проходящий через точку пересечения диагоналей;

EF, разделяющий трапецию на две подобные трапеции $EBCF$ и $AEFD$;

MN, проходящий через середины боковых сторон;

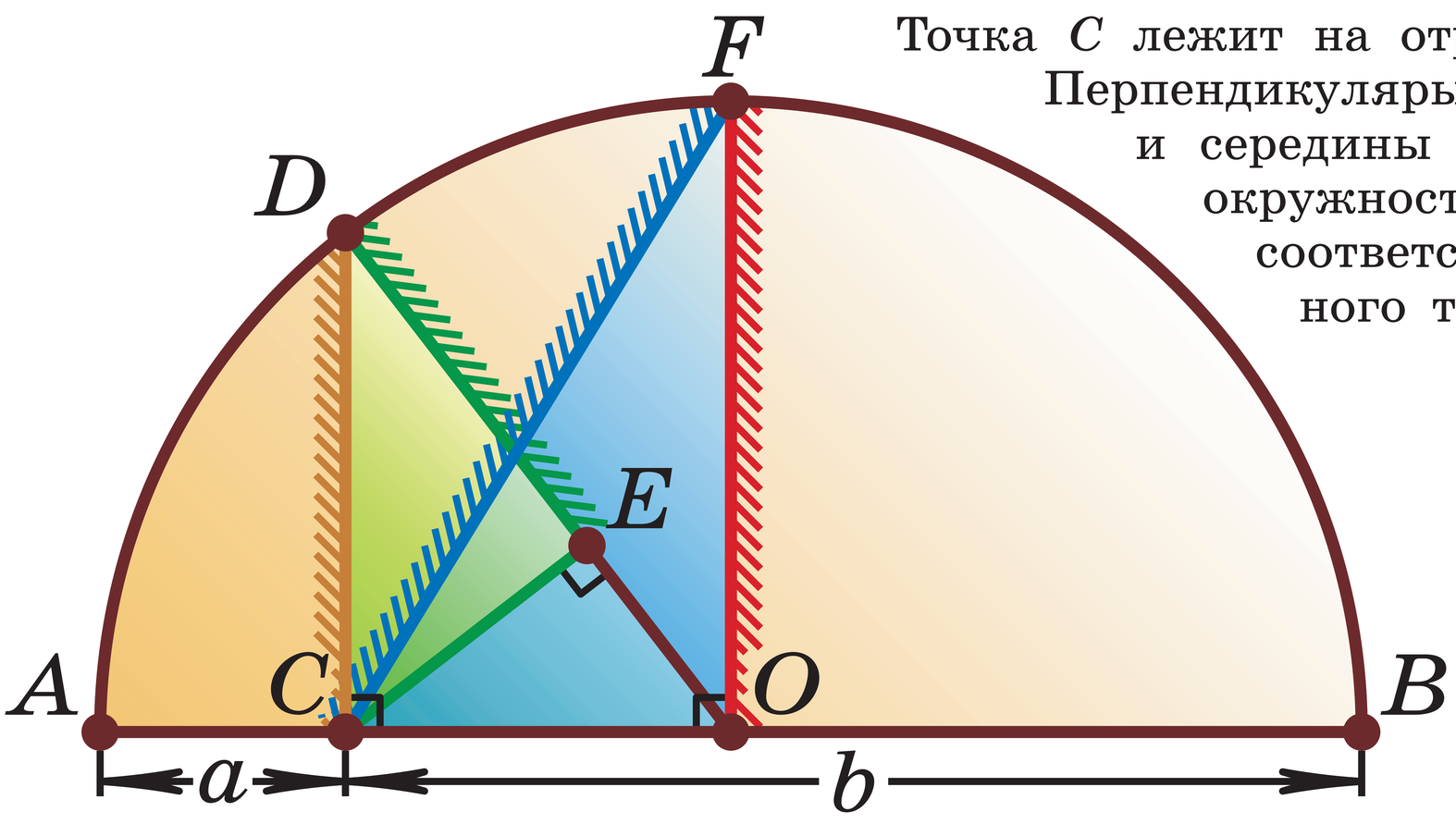
GH, разделяющий трапецию на две равновеликие части.

Тогда $PQ=\frac{2ab}{a+b}$, $EF=\sqrt{ab}$, $MN=\frac{a+b}{2}$, $GH=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Неравенства о средних

$$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

среднее гармоническое | среднее геометрическое | среднее арифметическое | среднее квадратическое (квадратичное)

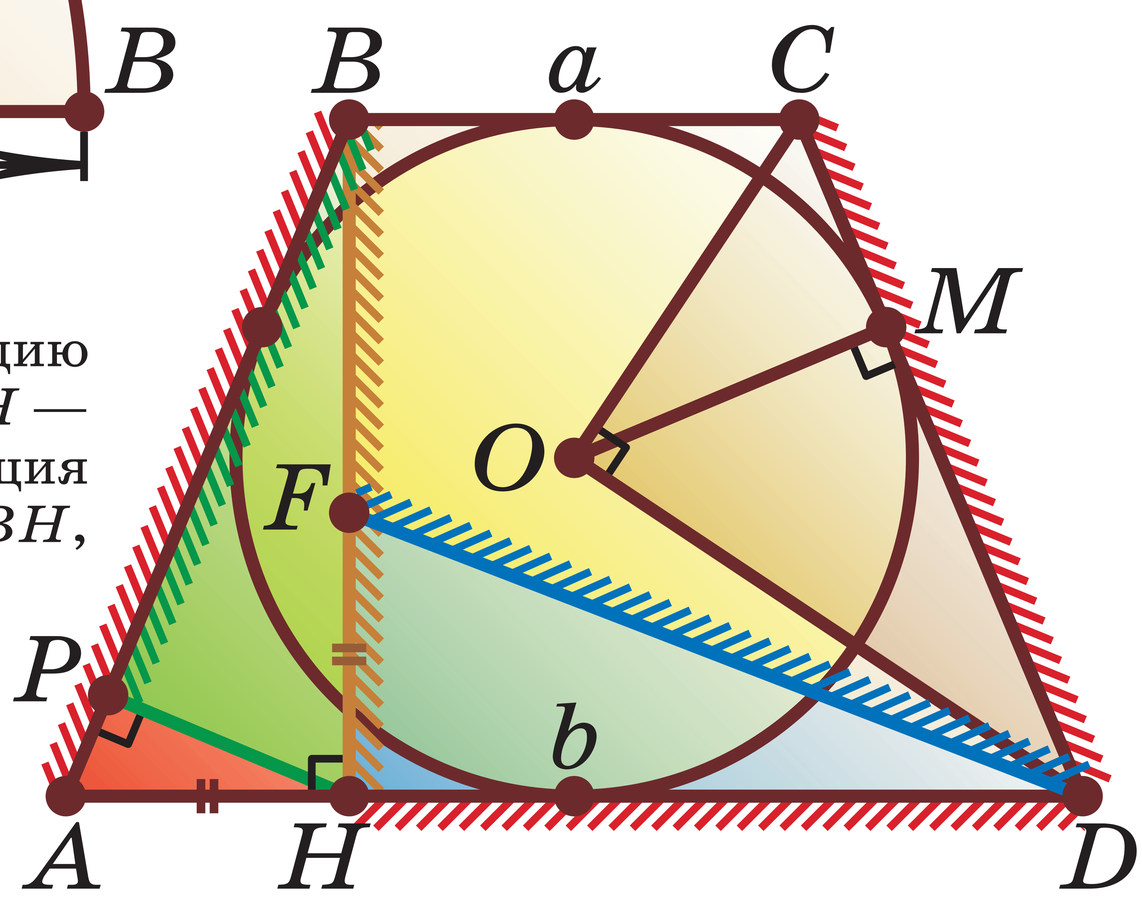


Точка C лежит на отрезке AB, причём $AC=a$, $BC=b$. Перпендикуляры к AB, восставленные из точки C и середины O отрезка AB, пересекают полуокружность с диаметром AB в точках D и F соответственно, CE — высота прямоугольного треугольника OCD. Тогда

$$OF=\frac{a+b}{2},\quad CD=\sqrt{ab},$$

$$DE=\frac{2ab}{a+b},\quad CF=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Окружность вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $BC=a$ и $AD=b$. Точка H — проекция вершины B на AD, точка P — проекция точки H на AB, точка F лежит на отрезке BH, причём $FH=AH$. Тогда

$$AB=CD=DH=\frac{a+b}{2},\quad BH=\sqrt{ab},$$

$$BP=\frac{2ab}{a+b},\quad FD=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$